Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Señales y Sistemas

Módulo 1 / Fundamentación conceptual:
Propiedades, características y tipos de señales y sistemas

Ejercicios resueltos de propiedades de sistemas continuos usando su relación entrada-salida[1]

A continuación se solucionan ejercicios sobre propiedades de sistemas continuos utilizando su relación entrada-salida. En el primero de ellos, un sistema arroja como salida la combinación de dos versiones de la entrada desplazadas en el tiempo.

1. Sea la secuencia un sistema con una relación entrada salida $x(t) \to y(t)$ tal que $y(t) = x(t-2) + x(2-t)$. Determina cual de las siguientes propiedades se cumple:

   a) Sin memoria

   b) Invarianza en el tiempo

   c) Linealidad

   d) Estabilidad

   a) **El sistema tiene memoria**. Debido a que la salida en un instante de tiempo dado $t = \alpha$ (es decir, $y(\alpha)$) depende de valores anteriores de la entrada ($x(\alpha - 2)$), correspondientes al primer término de la expresión de $y(\alpha)$. Por ejemplo, para un valor de $\alpha = 4$ segundos, la salida en ese momento dependerá de la entrada en 2 segundos, es decir, $x(2)$. Con esto es suficiente para concluir que hay memoria.

      Sin embargo, hay además memoria también en el segundo término de dicha expresión ($x(2-\alpha)$). Pero, ¿es $x(2-\alpha)$ un valor anterior o posterior a $x(\alpha)$?.

[1] Dimas Mavares T. *Visualizando el análisis de señales. Una introducción ala procesameinto de señales.* Trabajo de ascenso presentado como requisito para optar a la categoría de profesor titular. Barquisimeto, Venezuela: Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, 2017. ISBN: LA2016000013

En realidad este término representa una dependencia de valores tanto anteriores como posteriores de la entrada. Hay dependencia de valores anteriores y posteriores a la entrada cuando $\alpha < 1$, y sólo de valores anteriores si $\alpha > 1$. Por ejemplo, el valor de la señal de salida en $t = -5$, $y(-5) = x(-7) + x(7)$, es decir, el sistema 'recuerda' o depende de $x(-7)$ y $x(7)$. Por otra parte, para $t = 3$, $y(3) = x(1) + x(-1)$, es decir, la salida depende sólo de valores anteriores de la entrada.

Negar la propiedad implica decir que el sistema tiene memoria. Y cuando se niega una propiedad, se puede recurrir a un ejemplo para demostrar tal negación. Es por ello que es suficiente encontrar valores de t en los cuales la salida depende de valores anteriores o posteriores de la entrada. Pero ¿cómo podemos estar seguro de que un sistema es sin memoria?. Para afirmar una propiedad no es suficiente encontrar un ejemplo. La razón de ello es que se puede afirmar que un sistema posee cierta propiedad si esta se cumple en todo el tiempo para cualquier señal de entrada. Si para alguna señal de entrada particular, en tan sólo algún instante de tiempo no se cumpliese la propiedad, el sistema no posee tal propiedad.

En el caso de esta propiedad, los sistemas sin memoria suelen ser muy sencillos, y se reconocen a simple vista. Ejemplos de sistemas sin memoria son el sistema identidad ($y(t) = x(t)$ o $y[n] = x[n]$), el sistema de escalamiento en amplitud ($y(t) = Kx(t)$ o $y[n] = Kx[n]$), y sistemas que aunque involucren distintas funciones con diferentes argumentos, incluyan la señal de entrada sólo en forma de $x(t)$ o $x[n]$, tal como $y(t) = \tan(t) + \log(t + 8) + x(t)$. De esta forma, es suficiente argumentar que se observa dependencias en función de solamente $x(t)$ o $x[n]$. Fíjate que no se ha particularizado para alguna señal de entrada o un instante de tiempo en específico. Si particularizamos, no podemos afirmar la propiedad, porque únicamente estaríamos mostrando que se cumple para esa señal de entrada o ese instante de tiempo en particular.

b) **El sistema es no invariante en el tiempo**. Un sistema es invariante si mantiene su comportamiento en el tiempo, es decir, producirá la misma salida si se mantiene la misma entrada, aunque esta última se introduzca en distintos instantes. De esta forma, si $m(t) = y(t)|_{t=t-t_0}$, donde $x(t) \to y(t)$ y $x(t-t_0) \to m(t)$. Dicho en palabras, $m(t)$ es la salida del sistema cuando se introduce una entrada $x(t)$ desplazada en t_0, mientras que $y(t)$ es la salida del sistema, cuando la entrada es $x(t)$ (sin desplazar). Si una versión desplazada en el tiempo de $y(t)$ (esto es, $y(t-t_0)$) y $m(t)$ son iguales, el sistema es invariante en el tiempo.

Podemos resolver este problema analíticamente, utilizando las herramientas algebraicas. Si

$$y(t) = x(t-2) + x(2-t),$$

entonces

$$\begin{aligned} y(t-t_0) &= y(t)|_{t=t-t_0} = x(t-t_0-2) + x(2-(t-t_0)) \\ \Rightarrow y(t-t_0) &= x(t-t_0-2) + x(-t+t_0+2). \end{aligned}$$

Mientras que si se introduce al sistema $p(t)$, una versión desplazada $x(t)$ tal que $p(t) = x(t-t_0) \to m(t)$

$$m(t) = p(t-2) + p(2-t) = x(t-t_0-2) + g(t),$$

donde $g(t)$ es el resultado de invertir $x(t-t_0)$ y trasladar (a la señal invertida) dos unidades. Invertir $x(t-t_0)$ da como resultado

$$h(t) = x(t-t_0)|_{t=-t} = x(-t-t_0).$$

Entonces

$$p(-t+2) = x(-t-t_0+2).$$

Por lo tanto

$$m(t) = x(t - t_0 - 2) + x(2 - t - t_0) \neq y(t - t_0).$$

Por lo tanto, el sistema es no invariante en el tiempo.

El procedimiento anterior, aunque matemáticamente correcto, dice poco acerca del tratamiento de señal que ejecuta el sistema. Observemos lo que sucede cuando se introduce al sistema una señal cualquiera.

Se intenta demostrar que el sistema es no invariante en el tiempo. Como vamos a negar la propiedad, podemos recurrir a un ejemplo para hacerlo. Usemos aquí un ejemplo para demostrar que el sistema es no invariante en el tiempo. Tomemos una señal de entrada $x(t) = \delta(t - 6)$ (Figura 1).

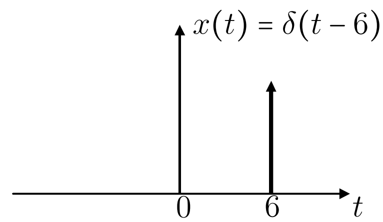

Figura 1: Señal de entrada $x(t)$.

De tal manera que la señal de salida $y(t)$, donde $x(t) \to y(t)$

$$y(t) = x(t - 2) + x(2 - t) = \delta(t - 6 - 2) + p(t),$$

donde $p(t)$ es una versión invertida de $x(t)$ y luego desplazada dos unidades. Si llamamos $q(t)$ a la versión invertida de $x(t)$, entonces $q(t) = x(-t) = \delta(-t-6)$. Desplazar $q(t)$ dos unidades implica obtener una $p(t)$ tal que (ver Figura 2)

$$p(t) = q(t + 2) = \delta(-t - 6 + 2) = \delta(-t - 4) = \delta(t + 4).$$

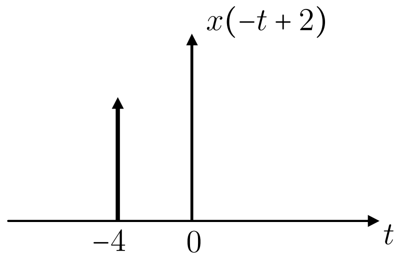

Figura 2: Señal de entrada invertida y desplazada $p(t)$.

de tal forma que la señal $y(t)$ será igual a (ver Figura 3)

$$y(t) = \delta(t-8) + \delta(t+4)$$

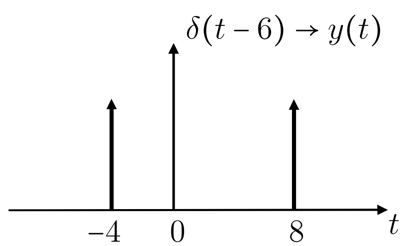

Figura 3: Señal de entrada invertida y desplazada $p(t)$.

Recordemos que deseamos comparar una versión desplazada de la salida $(y(t-t_0))$ con la salida correspondiente a una entrada desplazada $(m(t))$. Si escogemos arbitrariamente $t_0 = 3$ (Figura 4)

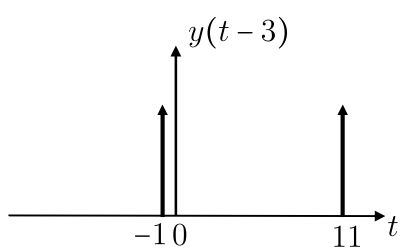

Figura 4: Señal de salida desplazada $y(t - t_0)$

$$y(t-t_0) = y(t-3) = \delta(t-8-3) + \delta(t+4-3) = \delta(t-11) + \delta(t+1),$$

mientras que si $x(t-3) \rightarrow m(t) = x(t-2) + x(2-t)|_{x(t)=\delta(t-9)}$ (Figura 5)

$$\Rightarrow m(t) = \delta(t-9-2) + \delta(-t-9+2) = \delta(t-11) + \delta(-t-7)$$

donde el segundo término del lado derecho lo hemos obtenido invirtiendo $\delta(t-9)$ y desplazándole dos unidades a la izquierda.

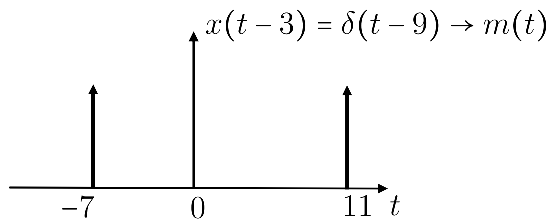

Figura 5: Señal de salida desplazada $y(t - t_0)$

Se puede observar, tanto grafica como algebraicamente, que $y(t-t_0)$ y $m(t)$ difieren en la posición del impulso situado del lado izquierdo del eje del tiempo. Como $y(t-t_0) \neq m(t)$, el sistema es no invariante en el tiempo. La escogencia del valor desplazamiento en el tiempo $t_0 = 3$ es tan bueno como cualquier otro, tiene muy poco o ningún impacto en el resultado final. Pero escoger la señal de entrada $x(t)$ sí es importante. El ejemplo anterior se pudo haber logrado con casi cualquier otra señal. Sin embargo, hacerlo con impulsos unitarios proporciona claridad y sencillez al problema. ¿Qué tal si lo intentas con alguna otra señal, diferente a un impulso unitario?.

c) **El sistema es estable**. La propiedad de estabilidad describe cómo es el comportamiento del sistema a cierta clase de estímulos. El término estabilidad lo utilizamos en nuestra vida diaria para describir un estado de las cosas, animales o personas.

Imagina que tienes un compañero de residencia el cual no sabes cual será su reacción cuando lo saludes. El lunes te levantas y le saludas, y él te responde amigablemente. Luego le pides amablemente que no deje los platos sucios en el fregadero y él monta en cólera. Sin duda concluiríamos que es una persona no estable. Pero, ¿porqué no estable?. Pues porque con un pequeño estímulo, como hacerle una amable observación, su reacción es despropor-cionada. Este mismo concepto se aplica a los sistemas. Por otra parte, si te levantas en la mañana y le dices groseramente a tu compañero que es un cochino, no debe extrañarte que responda agresivamente. No significa que tu compañero sea no estable, pues un fuerte estímulo negativo es razonable que genere una fuerte reacción.
Si introducimos a un sistema una entrada acotada, es decir, una señal de entrada tal que su valor no supere un máximo finito en cualquier instante de tiempo, su salida podría ser no acotada, es decir, una señal de salida que tienda a infinito o a menos infinito en algún instante de tiempo (es decir, una salida que diverja). En este caso el sistema sería no estable. Mientras que si introducimos **cualquier** entrada acotada y la salida es **siempre** aco-tada, el sistema es estable. Observa que la estabilidad debe cumplirse para cualquier señal de entrada acotada y para todo el tiempo. Por otra parte, sin introducimos una señal no acotada, que la salida sea no acotada no significa que el sistema sea no estable. O dicho de otra forma, se dice que un siste-ma es estable si y sólo si toda entrada acotada origina una salida acotada. Matemáticamente, para un sistema con relación entrada salida $x(t) \rightarrow y(t)$, si $|x(t)| \leq B \; \forall t \Rightarrow |y(t)| \leq C \; \forall t$.
Ejemplos de entradas acotadas son las funciones seno y coseno, las funciones de Bessel y las funciones logarítmicas, entre otras. Ejemplos de funciones no acotadas son la función tangente, la función exponencial $e^{\alpha t}$. No se debe

confundir el concepto de señal acotada con el de señal de duración finita. Una señal de duración finita es aquella diferente de cero en sólo un intervalo finito de tiempo. Sin embargo, la señal acotada no tiene porqué ser de duración finita. Un ejemplo de ello es la señal $x(t) = 1$. Esta señal es claramente acotada, su valor es siempre el mismo, nunca ∞ o $-\infty$; al mismo tiempo, se extiende en el tiempo desde $-\infty$ a $+\infty$ siendo diferente de cero. Es acotada pero no de duración finita. El impulso unitario, como de costumbre, tiene consideración especial. Su amplitud en efecto llega a infinito, pero su energía es finita, y por lo tanto lo calificamos como señal acotada.

Volviendo a nuestro problema, la estabilidad del sistema con relación entrada salida $x(t) \to y(t)$ tal que $y(t) = x(t-2) + x(t-2)$. Podríamos probar introduciendo señales acotadas, y observando lo que ocurre con la salida. Sería estupendo que hicieses la prueba. Habrás notado que la salida no diverge si la entrada tampoco lo hace. El sistema es estable. Pero las pruebas que hiciste no son suficientes para demostrarlo, porque probaste para señales particulares; como estamos afirmando la propiedad, no se aceptan particularizaciones. Procedamos entonces algebraicamente:

Si la señal $x(t)$ es acotada, se decir, $|x(t)| < B$ (o dicho de otra forma, $x(t)$ no es nunca mayor que $+B$ ni menor que $-B$), entonces

$$|y(t)| = |x(t-2) + x(2-t)| \tag{1}$$

$$\Rightarrow |y(t)| \leq |x(t-2)| + |x(2-t)| \tag{2}$$

$$\Rightarrow |y(t)| < 2B. \tag{3}$$

Esto significa simplemente que como $y(t)$ es la suma de dos modificaciones de $x(t)$ en ninguna de las cuales se ha modificado su amplitud, y como $x(t)$ es siempre mayor que $-B$ y menor que B, $y(t)$ forzosamente debe ser mayor que $-2B$ y menor que $2B$ en todo momento.

En el siguiente ejercicio un sistema escala la señal de entrada con un exponencial complejo.

2. Sea un sistema con una relación entrada salida $x(t) \to y(t)$ tal que $y(t) = e^{j\omega t}x(t)$. Determina cual de las siguientes propiedades se cumple:

   a) Sin memoria

   b) Invarianza en el tiempo

   c) Linealidad

   d) Estabilidad

   a) **El sistema es sin memoria**. Al observar la relación entrada salida del sistema, podemos notar que la dependencia respecto a la entrada se da sólo en función de $x(t)$. Existe otra función involucrada, $e^{j\omega t}$, pero en ella no hay referencia a la señal de entrada, y por lo tanto es intrascendente respecto a la propiedad de memoria. Concluimos entonces que, dado que la salida en un instante cualquiera $y(t_0)$ depende de la entrada sólo en dicho instante $x(t_0)$, el sistema es sin memoria.

      La propiedad de memoria es referida con mucha frecuencia en ingeniería eléctrica y electrónica. Los sistemas sin memoria gozan de un nivel de complejidad menor que el de sistemas con memoria. Por ejemplo, en el contexto de las telecomunicaciones existen técnicas de procesado de señal que involucran memoria, tales como sistemas de codificación/decodificación, los cuales aumentan la confiabilidad o velocidad de los enlaces de telecomunicaciones, pero que exigen mucho mayor procesamiento y consumo de energía que las técnicas sin memoria. En el área de sistemas de control, se pueden diferenciar sistemas de control con o sin memoria, existiendo diferencias significativas entre ellos en términos de requerimientos y resultados.

   b) **El sistema es no invariante en el tiempo**. Al estar la señal de entrada escalada por una función dependiente del tiempo, es natural pensar que la salida dependerá no sólo de la señal de entrada, sino también del momento en que esta señal sea aplicada. Por esta razón, podríamos hipotetizar que el sistema es no invariante en el tiempo, y buscar así un ejemplo que niegue dicha propiedad.

Recurramos nuevamente al impulso unitario. Digamos que administramos una señal de entrada $x(t) = \delta(t)$. La salida entonces será

$$y(t) = e^{j\omega t}\delta(t) = e^{j\omega t}|_{t=0}\delta(t) = e^{0}\delta(t) = \delta(t),$$

En este caso estamos aplicando la 'propiedad de selección'del impulso unitario.

Si trasladamos $y(t)$ t_0 unidades de tiempo, digamos que $t_0 = 3$, entonces

$$y(t-3) = \delta(t-3)$$

Ahora tomemos la entrada $x(t)$ y trasladémosla tres unidades de tiempo a la derecha, es decir

$$x(t-3) = \delta(t-3)$$

Si ahora introducimos esta entrada trasladada al sistema, de forma que $x(t-3) \rightarrow m(t)$,

$$m(t) = e^{j\omega t}\delta(t-3) = e^{j\omega t}|_{t=3}\delta(t-3) = e^{3j\omega}\delta(t-3),$$

en donde hemos aplicado nuevamente la propiedad de selección del impulso. En este caso, se selecciona el valor de la señal $e^{j\omega t}$ en $t = 3$. Se puede observar que $y(t-3) \neq m(t)$. Por lo tanto, el sistema es no invariante en el tiempo. Nos ha bastado un ejemplo debido a que deseamos negar la propiedad.

De manera general también pudimos haber procedido. En este caso, sea

$$x(t-t_0) \rightarrow m(t) = e^{jwt}x(t-t_0).$$

Pero

$$y(t-t_0) = e^{jw(t-t_0)}x(t-t_0) = e^{-jwt_0}[e^{jwt}x(t-t_0)] = e^{-jwt_0}m(t).$$

Observa que si sustituimos $x(t) = \delta(t)$ y $t_0 = 3$, obtendríamos el mismo resultado que en el ejemplo.

c) **El sistema es lineal**. Debido a que la señal de salida no es más que la señal de entrada multiplicada por una función, podemos pensar que el sistema es lineal. Fíjate que la señal de entrada no sirve como argumento para el exponencial complejo, sólo es multiplicada por éste. Si no fuese este el caso, es decir, si exponencial complejo operase sobre $x(t)$ (como por ejemplo, $y(t) = e^{j\omega x(t)}$), el caso sería muy diferente.

Sea

$$x_1(t) \to y_1(t) = e^{jwt}x_1(t);\; x_2(t) \to y_2(t) = e^{jwt}x_2(t).$$

Mientras que

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to y_3(t)$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= e^{jwt}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a[e^{jwt}x_1(t)] + b[e^{jwt}x_2(t)] \\ \Rightarrow y_3(t) &= ay_1(t) + by_2(t). \end{aligned}$$

d) **El sistema es estable** Nuevamente partamos de la observación de la relación entrada-salida. Observemos que la señal de entrada se multiplica por un término dependiente del tiempo. ¿Diverge dicho término para algún valor de t?. El término en cuestión es un exponencial complejo de módulo unitario. Siendo de módulo unitario, claramente no diverge, muy por el contrario, su módulo es constante e igual a uno. Es por ello que es razonable esperar que el sistema sea estable. Formulando tal hipótesis, debemos proceder algebraicamente, para comprobarlo en forma general.

Sea una señal de entrada acotada, tal que $|x(t)| < B$. Entonces, la salida correspondiente será

$$|y(t)| = |e^{jwt} x_1(t)| = |e^{jwt}||x_1(t)| = |x_1(t)|.$$

Luego

$$|y(t)| < |B|.$$

Es decir, la salida es también acotada, con la misma cota superior y cota inferior que la señal de entrada.

¿Qué pasaría si la exponencial que multiplica a $x(t)$ fuese una exponencial real?, ¿sería el sistema estable?.